MECÁNICA DE SÓLIDOS Y SISTEMAS ESTRUCTURALES

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID

CURSO: 2007/2008 FECHA: 15 / FEB HOJA Nº. 5

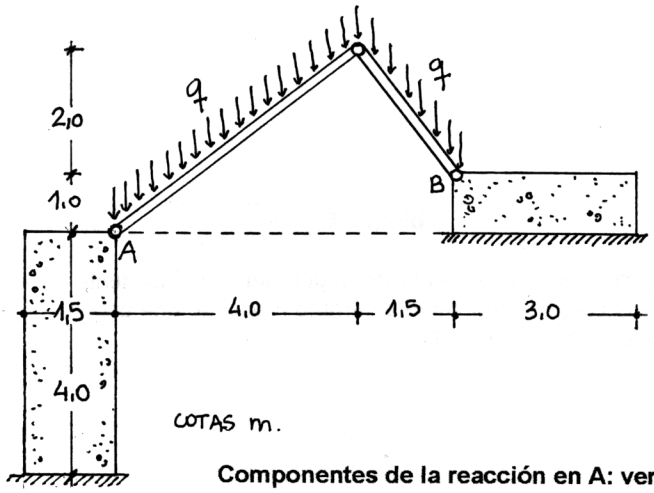
Z Y X

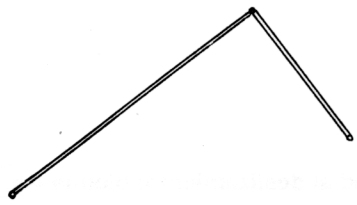
Apellidos:	Nombre:	Nº Exp

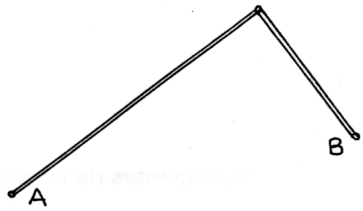
PRÁCTICA 2: EQUILIBRIO, ACCIONES, REACCIONES.

1.- La estructura de la figura está formada por dos barras de material homogéneo que se pueden suponer indeformables, articuladas entre sí en su extremo del vértice superior y a unos bloques prismáticos de hormigón, de **1,0 m** de profundidad en el sentido perpendiculara al papel, en su otro extremo. Si sobre ellas actúa la carga **q = (30 + Y) kN/m** representada en la **figura 1**, calcular las componentes de las reacciones en los bloques para que exista equilibrio. Representar a **ESCALA acotándolas:**

1. - Sobre la figura del **centro**: **Acciones que actúan en las barras** y su **resultante**.
2. - Sobre la figura de la **derecha**: **Resultante** de las acciones y **reacciones** en las articulaciones que la **equilibran**.

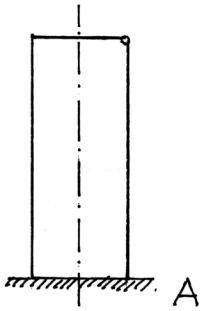


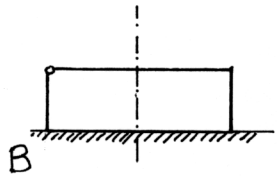




Componentes de la reacción en A: vertical V_A= kN **horizontal** H_A= kN
Componentes de la reacción en B: vertical V_B= kN **horizontal** H_B= kN

2.- Representar a escala las acciones que actúan sobre cada uno de los bloques (**peso específico del hormigón 25 kN/m^3**) comprobando si es posible el equilibrio al vuelco. Indicar el coeficiente de seguridad al vuelco de cada uno de los bloques.





Coeficientes de seguridad al vuelco: bloque A γ_{vA}= **bloque B** γ_{vB}=

3.- Se desea que **el coeficiente de seguridad al vuelco** de ambos bloques de hormigón sea **igual o mayor que 2. Indicar la profundidad mínima superior a 1,0 m, en el sentido perpendicular al papel, que deben poseer los bloques para verificar ese requisito (redondear la dimensión a decímetros enteros).**

Profundidad mínima: bloque A d_A= m **bloque B** d_B= m

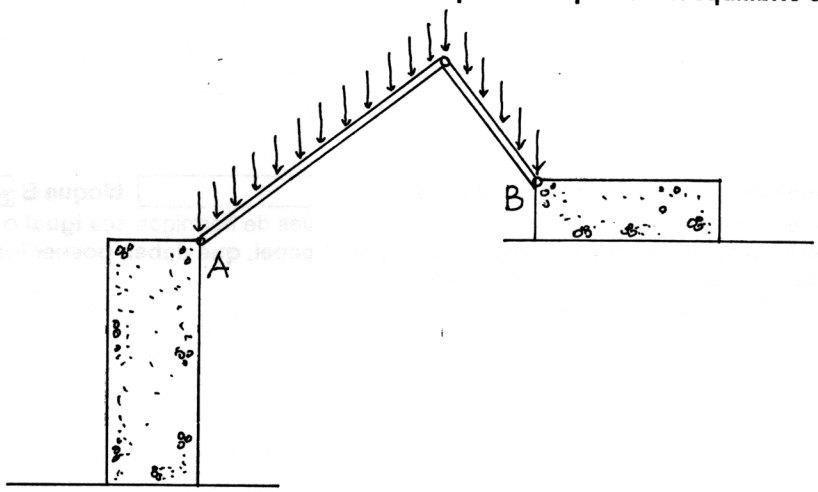
4.- Para la profundidad de los bloques indicada en el apartado anterior, calcular el coeficiente de seguridad al deslizamiento si el **ángulo de rozamiento bloque-suelo** es **$\varphi = 30^o$**.

Coeficientes de seguridad al deslizamiento: bloque A γ_{dA}= _____ **bloque B** γ_{dB}= _____

5.- Para la profundidad de los bloques indicada en el apartado **3**, calcular el coeficiente de seguridad al hundimiento si la **tensión de rotura del terreno** es **σ_u = 750 kN/ m^2**. Se supondrá que la carga se transmite al terreno mediante una presión de servicio que se reparte de manera uniforme a ambos lados de la resultante de las fuerzas.

Coeficientes de seguridad al hundimiento: bloque A γ_{hA}= _____ **bloque B** γ_{hB}= _____

Representar las reacciones existentes en el terreno que hacen posible el equilibrio de toda la estructura.



6.- El valor de la carga **q se multiplica por 2**. Indicar si la estructura es estable:

Al vuelco _____ Al deslizamiento _____ Al hundimiento _____

Práctica 2. Equilibrio, acciones, reacciones

Datos. Resumen de la información del enunciando de la práctica.

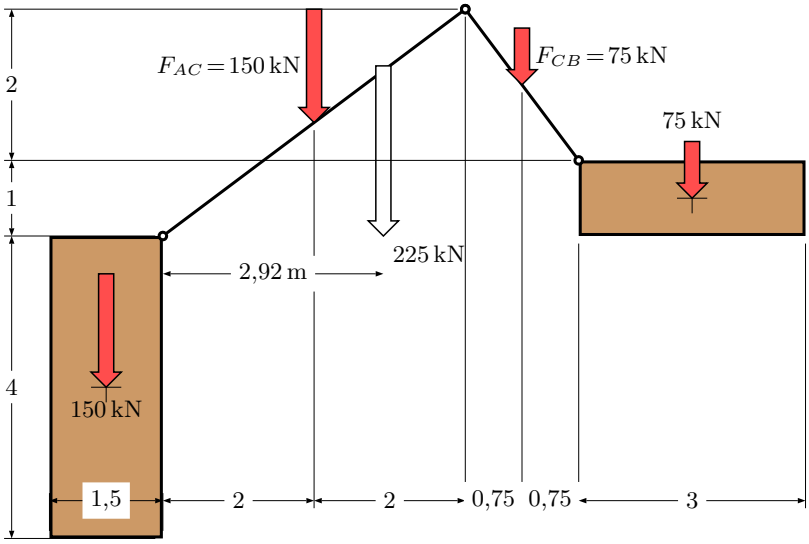
$\mathbf{q} = 30\,\mathrm{kN/m}$; $\rho = 25\,\mathrm{kN/m^3}$;
profundidad: 1 m;
ángulo de rozamiento: 30º
($\mu = 0{,}58$);
presión de hundimiento: $750\,\mathrm{kN/m^2}$.

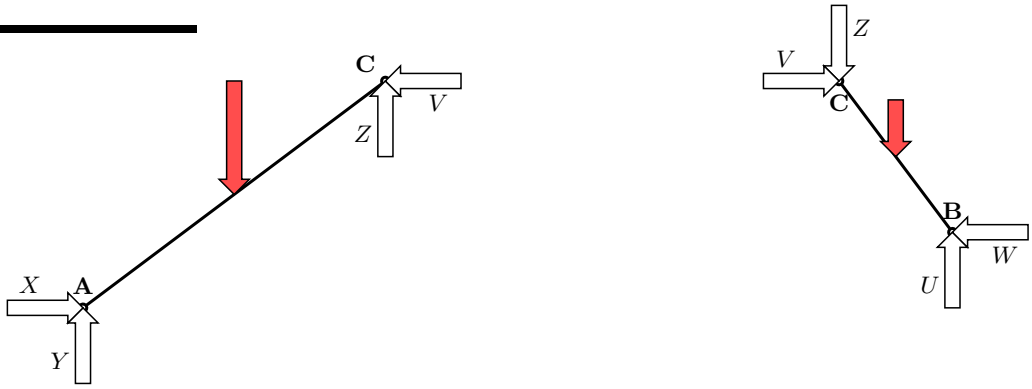
$F_{AC} = \mathbf{q} \times 5\,\mathrm{m} = 150\,\mathrm{kN}$;
$F_{CB} = \mathbf{q} \times 2{,}5\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{kN}$.

Posición de $\vec{F_{AC}} + \vec{F_{CB}}$:

$$150\,\mathrm{kN} \times 2\,\mathrm{m} + 75\,\mathrm{kN} \times (4\,\mathrm{m} + 0{,}75\,\mathrm{m})$$

$$= 225\,\mathrm{kN} \times x \quad \Rightarrow \quad x = 2{,}92\,\mathrm{m}$$

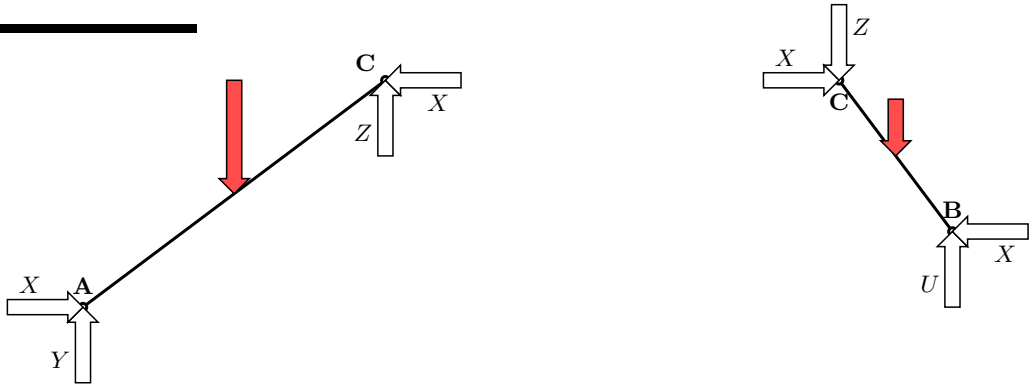




Considerando las dos barras, **AC** y **CB**, como sólidos indeformables unidos por la articulación en **C**, contamos con seis ecuaciones de equilibrio en total (tres por cada sólido), y también seis incógnitas: X, Y, Z, U, V, W.

Nótese que Z y V actúan con signos opuestos a un lado y a otro de la articulación **C**: opera aquí el principio de acción y reacción.

Las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas horizontales sobre ambas barras permite concluir que X, V y W tienen el mismo valor: *gastamos* dos ecuaciones pero eliminamos dos incógnitas.



Las cuatro ecuaciones restantes pueden escribirse como ecuaciones de equilibrio de momentos. Considerando el equilibrio de los momentos respecto a **A** en la barra **AC**, y el equilibrio de los momentos respecto a **B** en la barra **CB**, determinamos X y Z, las fuerzas en la articulación **C**.

$$\left.\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \text{ para AC: } 150\,\mathrm{kN} \times 2\,\mathrm{m} - Z \times 4\,\mathrm{m} - X \times 3\,\mathrm{m} = 0 \\ \sum M_B = 0 \text{ para CB: } 75\,\mathrm{kN} \times 0{,}75\,\mathrm{m} + Z \times 1{,}5\,\mathrm{m} - X \times 2\,\mathrm{m} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = 54\,\mathrm{kN} \\ Z = 34{,}5\,\mathrm{kN} \end{array}\right.$$

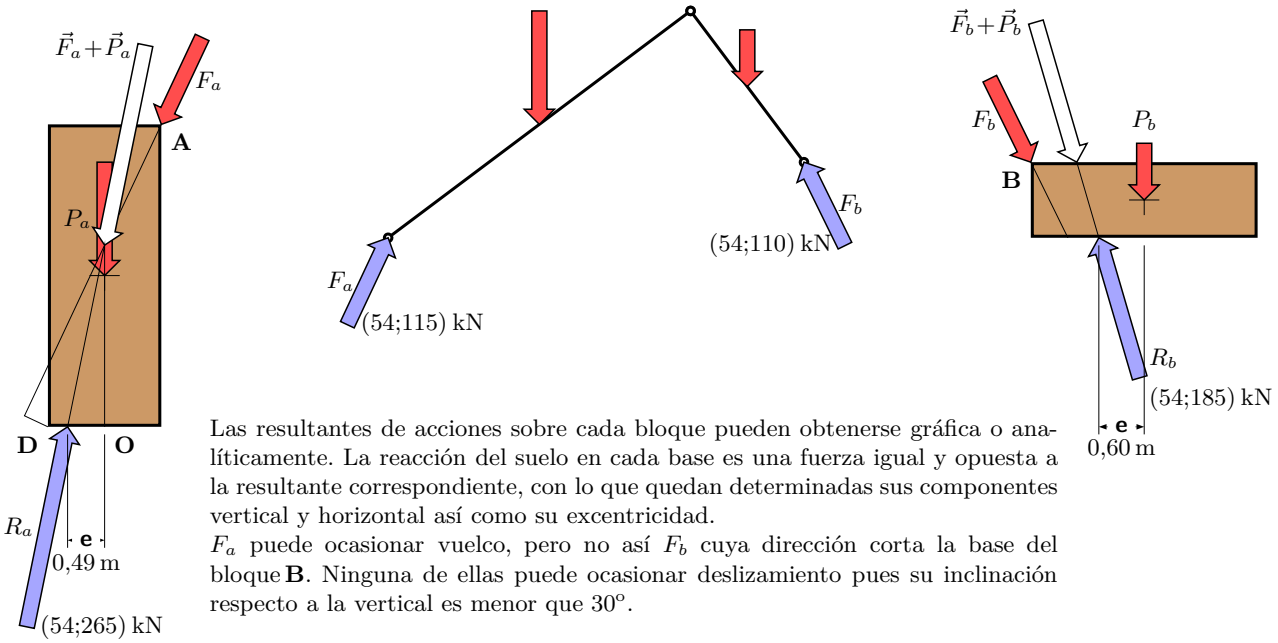
Con el equilibrio de momentos respecto a **C** tanto en **AC** como en **BC**, determinamos Y y U.

$$\sum M_C = 0 \text{ para AC: } 150\,\mathrm{kN} \times 2\,\mathrm{m} - Y \times 4\,\mathrm{m} + X \times 3\,\mathrm{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y \approx 115\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M_C = 0 \text{ para CB: } 75\,\mathrm{kN} \times 0{,}75\,\mathrm{m} - U \times 1{,}5\,\mathrm{m} + X \times 2\,\mathrm{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad U \approx 110\,\mathrm{kN}$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales y de momentos respecto a **A** aplicadas al conjunto **ACB** sirven de comprobación.

$$Y + U \approx 225\,\text{kN} \qquad 225\,\text{kN}\times 2{,}92\,\text{m} - U\times 5{,}5\,\text{m} - X\times 1\,\text{m} = -2{,}00\,\text{mkN} \approx 0\,\text{mkN}$$



Las resultantes de acciones sobre cada bloque pueden obtenerse gráfica o analíticamente. La reacción del suelo en cada base es una fuerza igual y opuesta a la resultante correspondiente, con lo que quedan determinadas sus componentes vertical y horizontal así como su excentricidad.
F_a puede ocasionar vuelco, pero no así F_b cuya dirección corta la base del bloque **B**. Ninguna de ellas puede ocasionar deslizamiento pues su inclinación respecto a la vertical es menor que 30º.

Seguridad al vuelco en el bloque A. El vuelco se producirá al crecer F_a, mediante un giro respecto a **D**: basta considerar la ecuación de momentos en ese punto cuando la reacción del suelo pasa por él, para determinar el mínimo valor de F_a que produce vuelco y por tanto el coeficiente de seguridad con que contamos:

$$\gamma = \frac{M_{\text{est}}}{M_{\text{desest}}} = \frac{|\vec{P}_a \times \vec{OD}|}{|\vec{F}_a \times \vec{AD}|} = \frac{150\,\text{kN}\times 0,75\,\text{m}}{54\,\text{kN}\times 4\,\text{m} - 115\,\text{kN}\times 1,5\,\text{m}} = 2{,}59$$

Para que el coeficiente de seguridad al vuelco fuera exactamente 2, la profundidad del bloque debería ser $1\,\text{m}\times 2 \div 2{,}59 = 0{,}8\,\text{m}$. (La seguridad al vuelco de **B** es infinita...)

Hundimiento del bloque A.

Para la profundidad de 0,80 m, la resultante del peso y de $\vec{F}_a$ tiene una componente vertical de 235 kN y una horizontal de 54 kN. La reacción vertical del suelo debe actuar con una excentricidad **e** respecto al centro de la base: $54\,\text{kN}\times 4\,\text{m} - 115\,\text{kN}\times 0{,}75\,\text{m} - 235\,\text{kN}\times \mathbf{e} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e} = 0{,}55\,\text{m}$. El área útil para transmitir presión entre el suelo y el bloque tendrá una superficie de $0{,}80\,\text{m}\times(0{,}75\,\text{m} - 0{,}55\,\text{m})\cdot 2 = 0{,}32\,\text{m}^2$, y la presión media será $235\,\text{kN}\div 0{,}32\,\text{m}^2 = 742\,\text{kN/m}^2$; y el coeficiente de seguridad al hundimiento, $\gamma = 750\,\text{kN/m}^2 \div 742\,\text{kN/m}^2 = 1{,}01$, es decir, ¡hay una pizca de seguridad!

Para la profundidad original de 1,00 m, $\mathbf{e} = 0{,}49\,\text{m}$. El área útil vale ahora $1\,\text{m}\times(0{,}75\,\text{m} - 0{,}49\,\text{m})\cdot 2 = 0{,}52\,\text{m}^2$ y la presión media será del orden de $265\,\text{kN}\div 0{,}52\,\text{m}^2 = 509\,\text{kN/m}^2$; y el coeficiente de seguridad al hundimiento, $\gamma = 750\,\text{kN/m}^2 \div 509\,\text{kN/m}^2 = 1{,}47$.

Si se desea que la seguridad al hundimiento sea de al menos 2, hay que aumentar la profundidad **p** del bloque: de este modo aumenta el área útil de contacto pero también aumenta el peso.

$$\text{presión:} \;= \frac{\mathbf{N}}{\text{área de contacto}} = \frac{115\,\text{kN} + 6\,\text{m}^2\cdot\mathbf{p}\cdot 25\,\text{kN/m}^3}{\mathbf{p}\times 2\cdot(0,75\,\text{m} - \mathbf{e})} = \frac{750\,\text{kN/m}^2}{2}$$

La expresión general de la excentricidad depende también de **p**; tal y como hemos calculado antes:

$$\mathbf{e} = \frac{129{,}75\,\text{mkN}}{115\,\text{kN} + 6\,\text{m}^2\cdot\mathbf{p}\cdot 25\,\text{kN/m}^3}$$

Y al final nos encontramos con una ecuación de segundo grado para **p**:

$$\frac{(115\,\text{kN} + 6\,\text{m}^2\cdot\mathbf{p}\cdot 25\,\text{kN/m}^3)^2}{\mathbf{p}\times 2\cdot\left\{0,75\,\text{m}\cdot(115\,\text{kN} + 6\,\text{m}^2\cdot\mathbf{p}\cdot 25\,\text{kN/m}^3) - 129{,}75\,\text{mkN}\right\}} = \frac{750\,\text{kN/m}^2}{2}$$

Aunque puede resolverse despejando **p**, también puede tantearse distintos valores de **p**:

profundidad m	**N** kN	**e** m	área cobaricéntrica m^2	presión media kN/m^2	γ
1,00	265,00	0,49	0,52	508,88	1,47
2,00	415,00	0,31	1,75	237,22	3,16
1,50	340,00	0,38	1,11	307,65	2,44
1,30	310,00	0,42	0,86	359,72	2,08
1,20	295,00	0,44	0,74	396,29	1,89

Aumentar la profundidad para que no se produzca el hundimiento **no es lo mejor que puede hacerse**: mucho más eficaz es aumentar el ancho del bloque en el sentido de la excentricidad, es decir, de forma que **D** esté más a la izquierda—permaneciendo **A** en su lugar inicial. Para verlo, lo mejor es probar con un bloque de 1,95 m de ancho y la profundidad inicial de 1 m, bloque de idéntico volumen a la solución obtenida con 1,3 m de profundidad: la presión media sería ahora 242,22 kN/m^2 y la seguridad al hundimiento de 3,10. Además, como ventaja añadida, ahora no hay posibilidad de vuelco, pues la dirección de $\vec{F_a}$ corta a la base: estamos como en el caso del bloque **B**.

Hundimiento de B. Con más área y menos peso, no parece que esté en peligro de hundirse. Para 1,00 m de profundidad: $\mathbf{N} = 185\,\text{kN}$ $\mathbf{e} = 0{,}60\,\text{m}$ presión $= \dfrac{185\,\text{kN}}{1{,}80\,\text{m}^2} = 103\,\text{kN/m}^2$ $\gamma = 7{,}30$.

Reflexión final. Si de repente **q** fuera el doble, 60 kN/m:

- No habría peligro de deslizamiento, pues es imposible para cualquier valor de **q**.
- El momento desestabilizante para el vuelco de **A** sería doble, mientras que el estabilizante seguiría igual: el coeficiente de seguridad sería mitad: aquellos diseños que para 30 kN/m tenían seguridad 2 o menor resultarían inestables (se produciría el vuelco)
- Respecto al hundimiento, la respuesta es complicada debido a que la relación entre la presión media y **q** no es proporcional (lineal).

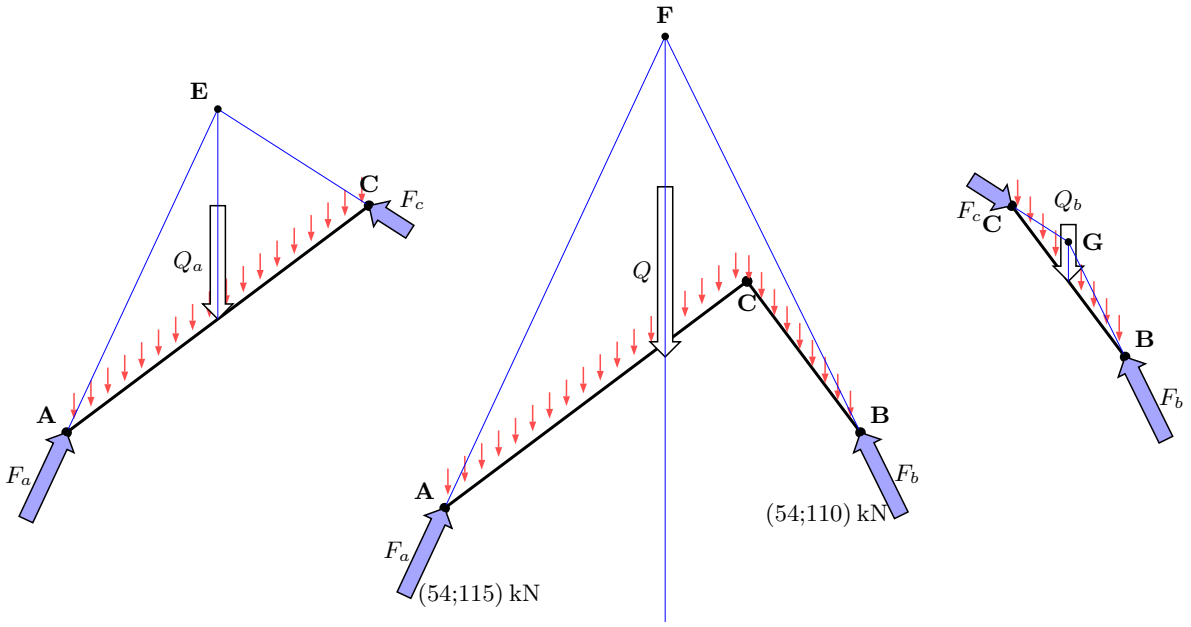
  En el caso del bloque **A**: la reacción normal aumenta, pero no al doble, sino algo menos. El área cobaricéntrica disminuye pero no es fácil ver si más o menos que el doble. Sumando los dos efectos parece probable que la presión aumente más que el doble y que el aumento de **q** al doble haga peligrar la estabilidad de diseños con coeficientes de seguridad mayores que 2. Pero la única forma de saberlo es hacer los números (o calcular la derivada respecto a **q**).

  Para el diseño original con **p** = 1,00 m, la presión media aumentaría hasta 2831 kN/m^2, es decir, 5,6 veces. La razón de este gran aumento se ve en la figura: al aumentar F_a, la reacción R_a se acerca peligrosamente al borde, reduciéndose rápidamente el área útil para el contacto.

  En el caso del bloque **B** la situación es menos dramática, lo que también se ve en la figura: la excentricidad no puede ser mayor que la distancia desde el centro al punto de corte de F_b con la base: por tanto, la resultante **nunca** se acercará peligrosamente al borde. Por supuesto que también habrá aumento de tensión, pero no tan rápido: para el diseño original, la presión aumentaría hasta 197 kN/m^2, es decir, 1,9 veces, más lentamente que **q**.

Para todos estos cálculos el uso de hoja de cálculo o de una calculadora programable es valioso: todos los cálculos anteriores están realizados con la ayuda del propio procesador de textos utilizado para componer este documento.

Comprobaciones gráficas. Puede comprobarse que las direcciones de F_a y F_b se cortan sobre la dirección de la resultante Q de toda la carga **q** (en el centro de la figura), punto **F**. Lo mismo pasa al considerar F_c con F_a y la resultante Q_a de **q** sobre la barra **AC** (a la izquierda, punto **E**), o ese mismo equilibrio para la barra **CD** (a la derecha, **G**). Que en los tres casos, las tres direcciones coincidan en un punto es la expresión gráfica de la ecuación de equilibrio de momentos.



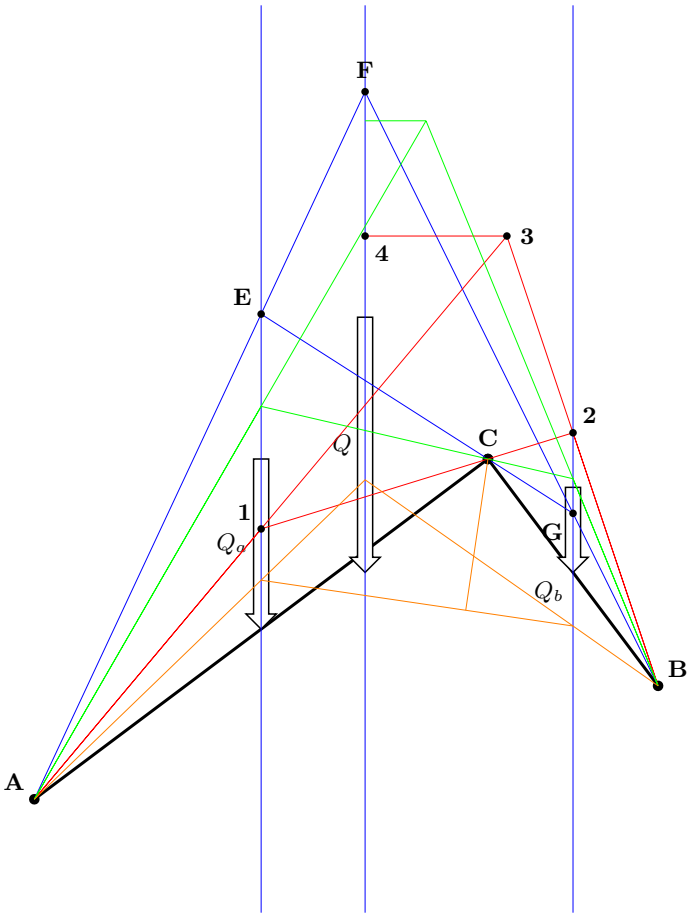
Las tres construcciones de la figura anterior deben verificarse **a la vez**, trazado azul de la figura de la derecha.

Con esa construcción es posible aproximarse a la solución gráficamente. Se traza una recta cualquiera por **A**, que sería la dirección de F_a. En el trazado rojo, por ejemplo, se ha elegido una inclinación de 50º. El corte de esa recta con la vertical de Q_a determina **1**. La recta **1C** será la dirección de F_c, y su corte con la vertical de Q_b determina **2**. **2B** será la dirección de F_b. Finalmente, la intersección de **A1** y **B2**, determina **3** que *debería estar* sobre la vertical de Q. No lo está, lo que indica que con esas inclinaciones F_a y F_b no pueden equilibrar a Q. El segmento **34** da idea del error que se comete.

Probando otros ángulos (trazado verde, por ejemplo), puede aproximarse la solución, que se reconocerá porque el segmento **34** se hace nulo (trazado azul, obtenido analíticamente), o muy pequeño.

Nótese que hay infinitas combinaciones de rectas que, pasando por **A** y **B**, se cortan sobre la dirección de Q (trazado naranja). Sin embargo, la recta que une sus intersecciones con las direcciones de Q_a y Q_b **no pasan** por **C**; la distancia de esta recta a este punto da una idea del error cometido respecto a la solución (trazado azul).

Existe una construcción directa para determinar las reacciones F_a, F_b y F_c, el polígono funicular.



Copyleft © 2009, Vázquez Espí. http://www.aq.upm.es/Departamentos/Estructuras/e96-290/doc/