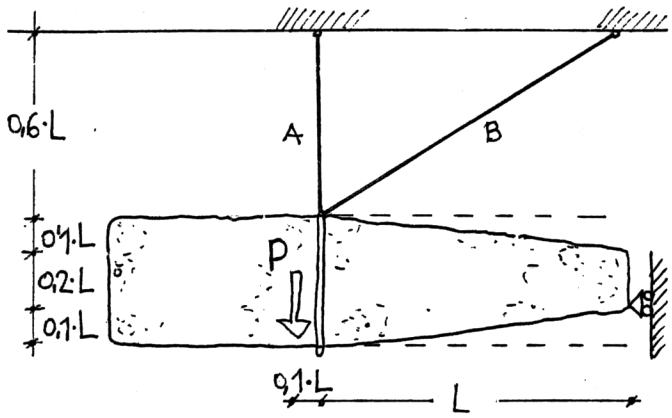
Z Y X

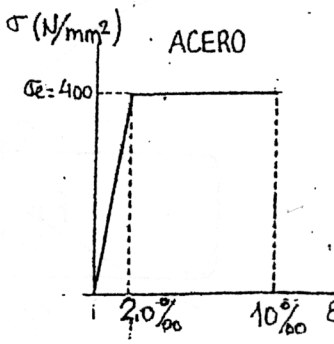
| Apellidos: | Nombre: | Nº Exp |
|---|---|---|

**PRÁCTICA 3: EQUILIBRIO, ESFUERZOS INTERNOS, DEFORMACIONES.**

**1.-** Se sustenta un bloque de peso **P= (150 + 4·X) kN**, según se indica en la figura 1, mediante barras de cuelgue de acero, cuyo diagramas de tensión-deformación está representado en la figura 2, y un apoyo. El techo y el bloque se supondrán indeformables e infinitamente resistentes. **Calcular las reacciones** en los apoyos que le **equilibran**, representándolas a sobre la figura 1. Indicar el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras, **dimensionándolas calculando el diámetro** necesario, redondeando a **mm enteros**, que deben poseer si se desea que **el coeficiente de seguridad** $\gamma$ sea **igual a 2.**

**L = (5 + 0,3·X) m**

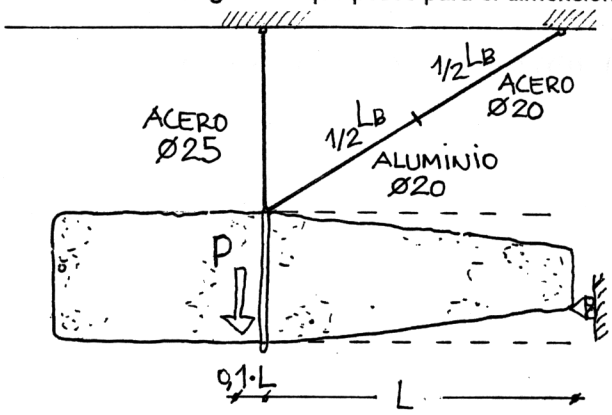


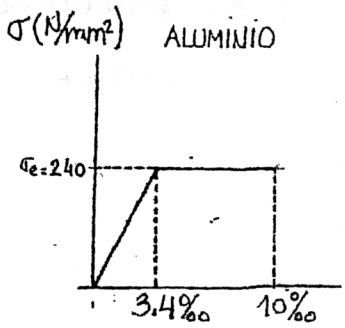




**Barra A: Esfuerzo interno** $N_A$= kN **diámetro** necesario $\phi_A$= mm

**Barra B: Esfuerzo interno** $N_B$= kN **diámetro** necesario $\phi_B$= mm

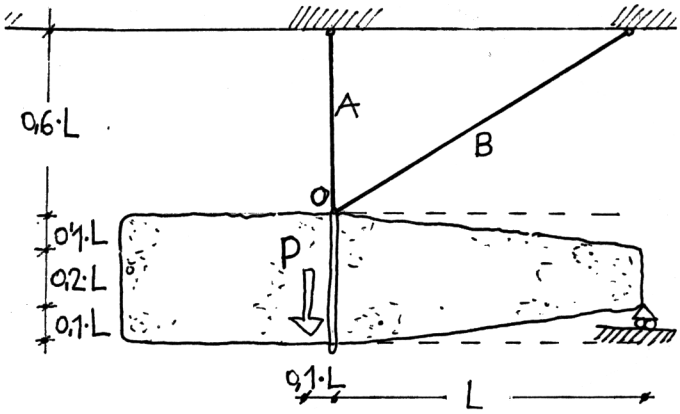
**2.-** Las barras de la estructura anterior se dimensionan en acero, del mismo tipo que la pregunta anterior, y en aluminio cuyo diagrama de tensión-deformación está representado en la figura inferior. Calcular la **carga última** de la estructura indicando el **coeficiente de seguridad** que posee para el dimensionado realizado.



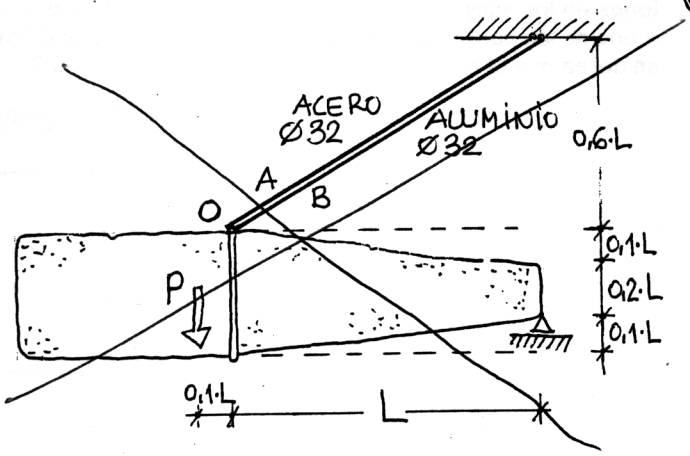

**Carga última que resiste la estructura** $P_u$= kN **coeficiente de seguridad que posee** $\gamma$=

**3.-** La posición del apoyo de la primera pregunta se modifica a la representada en la figura inferior. **Calcular las reacciones** en los apoyos, representándolas a sobre la figura, indicando el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras.




**Esfuerzos internos: Barra A** $N_A$= kN **Barra B:** $N_B$= kN

**4.-** Se modifica la sustentación del bloque a la representada en la figura inferior, en la que se conoce la dimensión de las barras de cuelgue siendo el material el indicado en apartados anteriores. **Calcular las reacciones** en los apoyos, representándolas a sobre la figura, indicando el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras. Calcular el valor del **desplazamiento vertical del punto O.**




(4) Calcular los alargamientos de los cables y los movimientos de los grados de libertad para alcanzar el equilibrio bajo la carga P.

**Esfuerzos internos: Barra A** $N_A$= kN **Barra B:** $N_B$= kN

**Desplazamiento vertical: Punto O** $\delta_{VO}$= mm

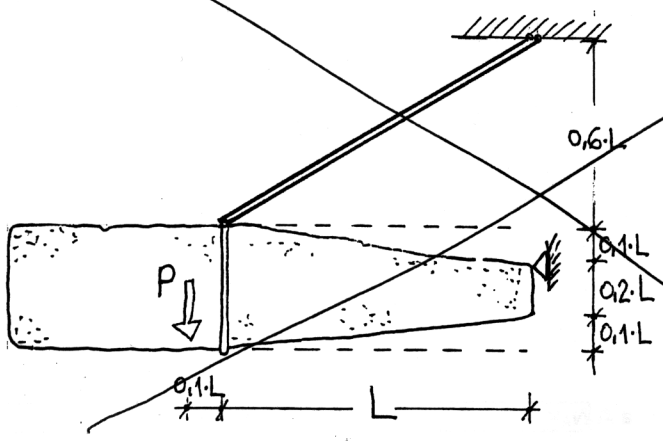
**5.-** Se desea limitar el desplazamiento vertical del punto O a **7 mm.** Calcular el diámetro mínimo necesario, redondeando a **mm enteros**, que debe poseer cada una de las barras **si se desea que ambas sean iguales y de acero** del indicado en la pregunta 1. Para ese diámetro, calcular **a qué tensión está trabajando** cada barra.

(5) Dimensionar los cables de forma que el descenso de P sea 1 mm o menor.

**diámetro** necesario $\phi_A=\phi_B$ mm

**Tensión barra A** $\sigma_A$= N/mm$^2$ **Tensión barra B** $\sigma_B$= N/mm$^2$

**6.-** La posición del apoyo de la pregunta anterior se modifica a la representada en la figura inferior. **Calcular las reacciones** en los apoyos, representándolas a sobre la figura, indicando el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras.




**Esfuerzos internos: Barra A** $N_A$= kN **Barra B:** $N_B$= kN

# MECÁNICA DE SÓLIDOS Y SISTEMAS ESTRUCTURALES

DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID

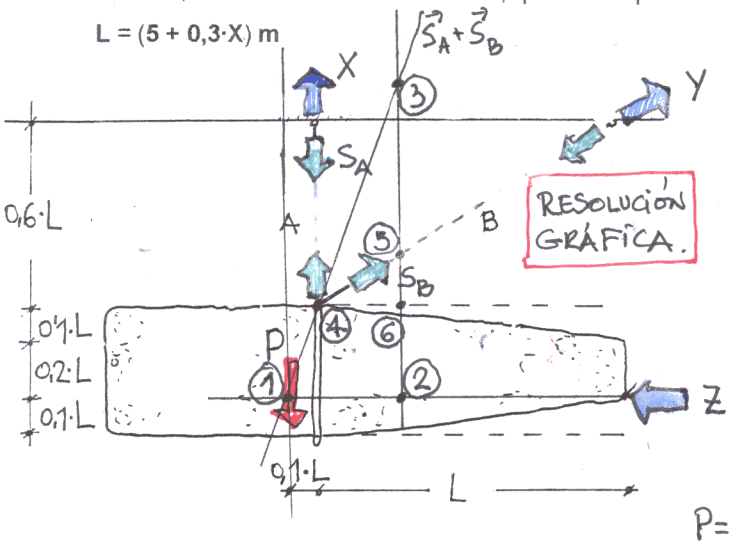
CURSO: 2007/2008 FECHA: 22 / FEB HOJA Nº. 6

Z Y X

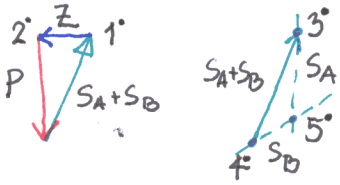
| Apellidos: | Nombre: | Nº Exp |
|---|---|---|

## PRÁCTICA 3: EQUILIBRIO, ESFUERZOS INTERNOS, DEFORMACIONES.

**1.-** Se sustenta un bloque de peso **P= (150 + 4·X) kN**, según se indica en la figura 1, mediante barras de cuelgue de acero, cuyo diagramas de tensión-deformación está representado en la figura 2, y un apoyo. El techo y el bloque se supondrán indeformables e infinitamente resistentes. **Calcular las reacciones** en los apoyos que le **equilibran**, representándolas a sobre la figura 1. Indicar el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras, **dimensionándolas calculando el diámetro** necesario, redondeando a **mm enteros**, que deben poseer si se desea que **el coeficiente de seguridad** γ sea **igual a 2.**

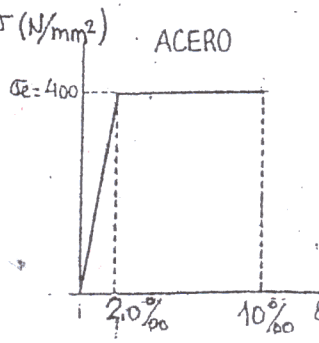



$$\frac{P}{23} = \frac{Z}{12} \;::\; \boxed{Z = \frac{12}{23}P \simeq 0{,}37P}$$




$$\frac{P}{36} = \frac{S_A}{35} \;::\; \boxed{S_A \simeq 0{,}78P}$$

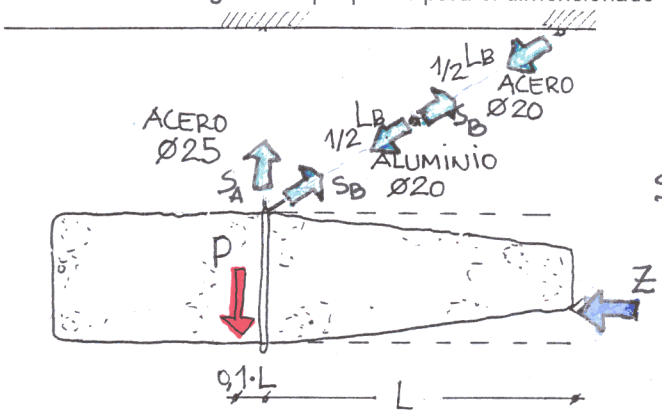
$$\frac{P}{36} = \frac{S_B}{45} \;::\; \boxed{S_B \simeq 0{,}45P}$$




P = 150 kN. Z  $P_u$ = 300 kN.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Barra A: Esfuerzo interno** | $N_A$= ~ 116 kN | **diámetro** necesario | $\phi_A$= 27 mm |
| **Barra B: Esfuerzo interno** | $N_B$= ~ 67 kN | **diámetro** necesario | $\phi_B$= 21 mm |

**2.-** Las barras de la estructura anterior se dimensionan en acero, del mismo tipo que la pregunta anterior, y en aluminio cuyo diagrama de tensión-deformación está representado en la figura inferior. Calcular la **carga última** de la estructura indicando el **coeficiente de seguridad** que posee para el dimensionado realizado.



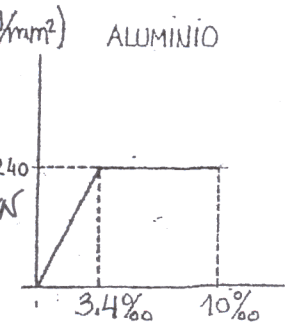

$$S_{A,u} = \frac{\pi(25mm)^2}{4} \times 400\frac{N}{mm^2} = 196\,kN$$

$$\Rightarrow P_u \leq 252\,kN$$

$$S_{B,Al,u} = \frac{\pi(20mm)^2}{4} \times 240\frac{N}{mm^2} = 75{,}4\,kN$$

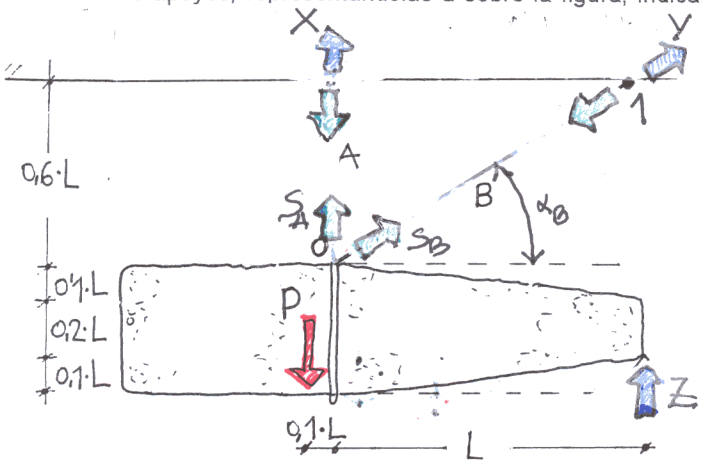
$$\Rightarrow P_u \leq 168\,kN$$

$$P_u = 168\,kN \qquad \gamma = \frac{168}{150} = 1{,}12$$




**Carga última que resiste la estructura** $P_u$= 168 kN **coeficiente de seguridad que posee** γ= 1,12

**3.-** La posición del apoyo de la primera pregunta se modifica a la representada en la figura inferior. **Calcular las reacciones** en los apoyos, representándolas a sobre la figura, indicando el **valor de los esfuerzos internos** en cada una de las barras.




$$\Sigma M_0 = 0 \;::\; P \times 0{,}1L + Z \cdot L = 0 \qquad \boxed{Z = -0{,}1P}$$

$$\Sigma M_1 = 0 \;::\; P \times 1{,}1L - S_A \cdot L = 0 \qquad \boxed{S_A = 1{,}1P}$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad S_B \cdot \cos\alpha_B = 0 \qquad \boxed{S_B = 0}$$

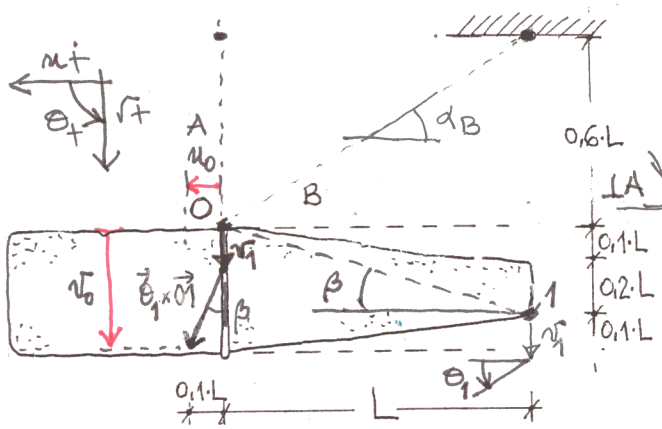
Comprobación

$$\Sigma F_y = 0 \;::\; P - S_A - Z = 0$$

$$P - 1{,}1P - (-0{,}1P) = 0$$

**Esfuerzos internos: Barra A** $N_A$= 165 kN **Barra B:** $N_B$= 0 kN

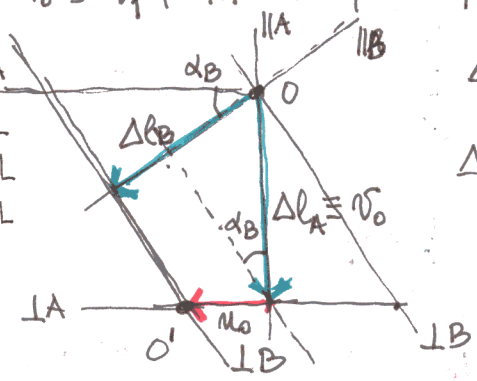
4.- Calcular los desplazamientos y giros (grados de libertad) que experimenta la piedra para alcanzar el equilibrio en el caso 1.




$$u_0 = |\vec{\theta}_1 \times \vec{O1}| \times \sin\beta = \theta_1 \cdot \overline{O1} \cdot \sin 90° \times \sin\beta =$$

$$= \theta_1 \cdot \frac{L}{\cos\beta} \sin\beta = \theta_1 \cdot 0{,}3L.$$

$$v_0 = v_1 + |\vec{\theta}_1 \times \vec{O1}| \times \cos\beta = v_1 + \theta_1 \cdot L$$




$$\Delta l_A = v_0$$

$$\Delta l_B = v_0 \cdot \sin\alpha_B + u_0 \cos\alpha_B$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5\,m \\ 1 & 5\,m \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_A \\ \Delta l_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos\alpha_B & \sin\alpha_B \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_A \\ \Delta l_B \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5\,m \\ 0{,}51 & 3{,}86\,m \end{bmatrix}}_{\text{matriz } B} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3{,}89 \\ -0{,}40\,m^{-1} & 0{,}78\,m^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_A \\ \Delta l_B \end{Bmatrix}}$$

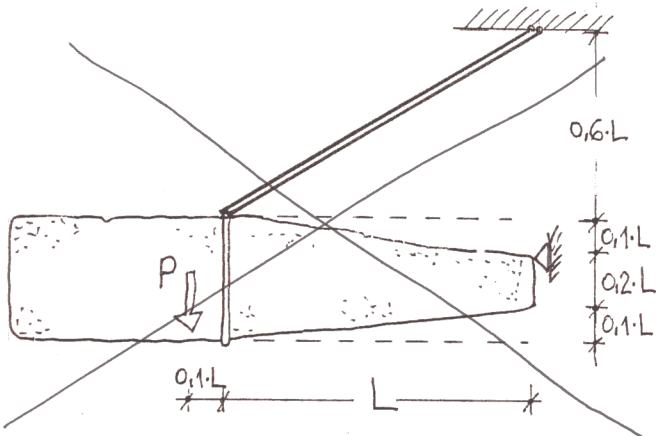
Trabajando con el dimensionado aproximado del apartado 1:

$$\Delta l_A = \frac{116\,kN}{38{,}170\,\frac{kN}{mm}} \simeq 3{,}04\,mm$$

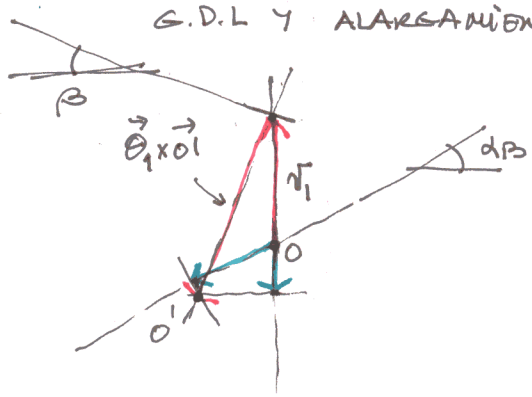
$$\Delta l_B = \frac{67\,kN}{11{,}88\,\frac{kN}{mm}} \simeq 5{,}64\,mm.$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= -12{,}8\,mm \\ \theta_1 &= 3{,}17\,mm/m = \\ &= 3{,}17\,mrad. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= 4{,}75\,mm \\ v_0 &= 3{,}04\,mm. \end{aligned}}$$




RELACIÓN GEOMÉTRICA ENTRE G.D.L Y ALARGAMIENTOS.




Esfuerzos internos: Barra A $N_A$= kN Barra B: $N_B$= kN

# Práctica 3. Equilibrio, esfuerzos internos, deformaciones

**Datos variables empleados:** $\mathbf{P} = 150\,\text{kN}$ $\mathbf{L} = 5\,\text{m}$.

**Crítica de la solución gráfica.** Los apartados **1**, **2**, **3** y **4** se han resuelto de forma aproximada en las páginas anteriores. En el procedimiento gráfico empleado en **1**, no usé más que una regla (ni siquiera escuadra y cartabón), y me fié de que la figura original estuviera a escala. ¿Cuánto de buena es esa solución obtenida gráficamente en **1**? Para averiguarlo hay que plantear ecuaciones de equilibrio analíticas. Puesto que los grados de libertad son $v_1$ y $\theta_1$ (ver figura del apartado **4** en la página anterior, punto **1**), las ecuaciones relevantes para el equilibrio de la piedra son la de fuerzas verticales y la de momentos respecto al apoyo vertical de la piedra:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \mathbf{P} - S_A - S_B \cdot \sin\alpha_B = 0 \qquad \sum M_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{P}\cdot 1{,}1\mathbf{L} - S_A\cdot\mathbf{L} - S_B\cdot\overline{10}\sin(\alpha_B+\beta) = 0$$

El convenio de signos y los puntos de referencia son los de la figura del apartado **4**; las fuerzas son las de la figura del apartado **1**. Reordenando términos:

$$\begin{array}{l}\mathbf{P} = S_A + S_B\cdot\sin\alpha_B \\ \mathbf{P}\cdot 1{,}1\mathbf{L} = S_A\cdot\mathbf{L} + S_B\cdot\overline{10}\cdot\sin(\alpha_B+\beta)\end{array} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ M_{\mathbf{P}}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}1 & 0{,}51\\ 5\,\text{m} & 3{,}86\,\text{m}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}S_A\\ S_B\end{array}\right\} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c}S_A\\ S_B\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0{,}80\\ 0{,}39\end{array}\right\}\cdot\mathbf{P} = \left\{\begin{array}{c}120\,\text{kN}\\ 58\,\text{kN}\end{array}\right\}$$

El error en $S_B$ es importante: casi del 16 %. (El viernes 22–02–2008, en la pizarra de clase, con un método semigráfico, el error fue menor: 121 kN y 57 kN.)

Con esta solución, el dimensionado para un coeficiente de seguridad a la rotura de 2 debería ser de 600 y 292 mm$^2$ respectivamente, es decir, diámetros de 28 y 20 mm.

La situación en servicio, $\mathbf{P} = 150\,\text{kN}$, sería:

| cable | diámetro mm | **A** área mm$^2$ | $\ell$ longitud m | **K** rigidez kN/mm | $N$ solicitación kN | $\sigma$ tensión N/mm$^2$ | $\varepsilon$ deformación mm/m | $\Delta\ell$ alargamiento mm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 28 | 615 | 3 | 41,0 | 120 | 195 | 0,98 | 2,92 |
| B | 20 | 314 | 5,83 | 10,8 | 58 | 185 | 0,92 | 5,39 |

La relación entre los desplazamientos y los alargamientos establecida en el apartado **4** es 'exacta'. Empleándola otra vez para los nuevos alargamientos, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta\ell_A\\ \Delta\ell_B\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2{,}92\,\text{mm}\\ 5{,}39\,\text{mm}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{c}v_1\\ \theta_1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}-12{,}2\,\text{mm}\\ 3{,}02\,\text{mrad}\end{array}\right\} \quad\text{y}\quad \left\{\begin{array}{c}u_0\\ v_0\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}4{,}53\,\text{mm}\\ 2{,}90\,\text{mm}\end{array}\right\}$$

---

**5. Redimensionar los cables del apartado 1 de manera que el descenso de P sea 1 mm o menor.**

La condición sobre el descenso de **P** es una forma poco habitual de cuantificar el requisito de rigidez (más habitual resulta limitar el valor absoluto de las rotaciones, $\theta_1$ en nuestro caso). El descenso del centro de gravedad de la piedra (punto de aplicación de **P**) será:

$$v_{\mathbf{P}} = v_1 + \theta_1\cdot 1{,}1\mathbf{L} = 4{,}41\,\text{mm}$$

Puesto que la anterior ecuación, las ecuaciones de equilibrio:

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ M_{\mathbf{P}}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}1 & 0{,}51\\ 5\,\text{m} & 3{,}86\,\text{m}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}S_A\\ S_B\end{array}\right\} \tag{1}$$

las ecuaciones de compatibilidad:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta\ell_A\\ \Delta\ell_B\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}1 & 5\,\text{m}\\ 0{,}51 & 3{,}86\,\text{m}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}v_1\\ \theta_1\end{array}\right\} \tag{2}$$

y las relaciones de rigidez de los cables $\mathbf{K} = N \div \Delta\ell$, son todas ellas lineales en condiciones de servicio, *hay proporcionalidad*: en particular, los desplazamientos como $v_0$ o $v_1$ son proporcionales a los alargamientos de las barras, y estos, a su vez, inversamente proporcionales a las áreas. Si se desea que un desplazamiento, como $v_{\mathbf{P}}$, aumente o disminuya, basta con aumentar o disminuir las áreas de los cables. En nuestro caso, si para el dimensionado actual $v_{\mathbf{P}} = 4{,}41\,\text{mm}$, bastará con aumentar el área de los cables por un factor $4{,}41\,\text{mm} \div 1\,\text{mm}$

para que $v_{\mathbf{P}}$ disminuya a 1 mm. Es decir con áreas de 2.712 mm$^2$ y 1.385 mm$^2$, y diámetros de 60 y 42 mm respectivamente, tensiones, deformaciones, alargamientos y desplazamientos disminuirán en la proporción $1 \div 4{,}41$. Esta es una regla bastante general de aplicación universal: al multiplicar el volumen de una estructura por un cierto factor (dejando inalterado su tamaño, esquema y proporción geométrica), la deformación disminuye en la misma medida (y lo mismo ocurre con todo lo que depende de ella: alargamientos, desplazamientos, giros).

La regla anterior puede visualizarse escribiendo la relación entre $v_{\mathbf{P}}$ y los alargamientos de las barras — empleando para ello la 'inversa' de la ecuación (2):

$$v_{\mathbf{P}} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 5{,}5\,\mathrm{m} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 5{,}5\,\mathrm{m} \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 5\,\mathrm{m} \\ 0{,}51 & 3{,}86\,\mathrm{m} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \Delta\ell_A \\ \Delta\ell_B \end{array} \right\} = 0{,}81\Delta\ell_A + 0{,}38\Delta\ell_B$$

y sustituyendo cada alargamiento por su valor en función del área, la longitud, el módulo de Young y la solicitación:

$$v_{\mathbf{P}} = 0{,}81\frac{120\,\mathrm{kN}\cdot 3\,\mathrm{m}}{200\,\mathrm{kN/mm^2}\cdot \mathbf{A}_A} + 0{,}38\frac{58\,\mathrm{kN}\cdot 5{,}83\,\mathrm{m}}{200\,\mathrm{kN/mm^2}\cdot \mathbf{A}_B} = \frac{1458\,\mathrm{mm^3}}{\mathbf{A}_A} + \frac{642\,\mathrm{mm^3}}{\mathbf{A}_B}$$

La condición sobre $v_{\mathbf{P}}$ resulta en una ecuación sobre las áreas de los cables:

$$1\,\mathrm{mm} = \frac{1458\,\mathrm{mm^3}}{\mathbf{A}_A} + \frac{642\,\mathrm{mm^3}}{\mathbf{A}_B}$$

Como tenemos dos variables y una sola ecuación, el problema admite varias soluciones, de las que la anteriormente calculada es sólo una de las posibles. Por ejemplo, al considerar el diámetro 42 mm para la barra B, de la ecuación anterior obtenemos que basta con un diamétro de 59 mm en la barra A, y no de 60 como calculamos antes; la muy pequeña discrepancia se debe a que antes, calculamos las áreas necesarias y luego redondeamos *por exceso* para obtener los diámetros. Puestos a probar, con un diámetro de 40 mm en la barra B, 62 mm bastarían en la barra A. ¿Cuál de las dos soluciones es *mejor*? Desde el punto de vista mecánico, las dos son aceptables: en ambas el descenso de $\mathbf{P}$ no supera el milímetro, y la seguridad de ambas es superior a la exigida. La elección sólo puede hacerse desde el punto de vista de la *estética*.

En arquitectura e ingeniería hay una regla estética implícita: alcanzar los objetivos propuestos con el menor consumo de recursos. Una regla, que dado el actual y lamentable estado del planeta mediano en el que vivimos es también una regla *ética*.

Los recursos son aquí el volumen de acero empleado y, de todas las soluciones posibles, deberíamos elegir aquella que requiera un volumen menor, $\mathbf{A}_A\ell_A + \mathbf{A}_B\ell_B$. Podemos, de hecho, probar varias soluciones, calculando el volumen de cada una:

| $\phi_A$ mm | $\mathbf{A}_A$ mm$^2$ | $\phi_B$ mm | $\mathbf{A}_B$ mm$^2$ | volumen dm$^3$ | $v_{\mathbf{P}}$ mm |
|---|---|---|---|---|---|
| 57 | 2552 | 44 | 1521 | 16,52 | 0,99 |
| 58 | 2642 | 43 | 1452 | 16,39 | 0,99 |
| **59** | **2734** | **42** | **1385** | 16,28 | 1,00 |
| 61 | 2922 | 41 | 1320 | 16,46 | 0,99 |
| 62 | 3019 | 40 | 1257 | 16,39 | 0,99 |
| 64 | 3217 | 39 | 1195 | 16,62 | 0,99 |
| 60 | 2827 | 42 | 1385 | 16,56 | 0,98 |

La solución mejor es la de diámetros 59 y 42. En la última fila está la primera solución calculada, 60/42, que gasta algo más de medio litro de acero que la 59/42 (un incremento del 1,72 %). Ya se ve que *en este caso* no hay una diferencia significativa, sobre todo, porque luego en la tienda seguro que no se encuentra el diámetro 59, y hay que acabar poniendo la solución 60/42 (16,56 dm$^3$).

Para conseguir reduciones de volumen más significativas sería necesario modificar el esquema, la proporción o el tamaño de la estructura, variables formales más importantes que el puro grueso o dimensionado de los miembros de la estructura.

**Una observación útil.** Compare el lector o lectora las ecuaciones (1) y (2). No son, desde luego, iguales; pero presentan algunas coincidencias notables: los coeficientes de ambas matrices dos por dos son los mismos números pero ordenados de manera ligeramente diferentes. Técnicamente, la matriz de la ecuación (1) es la *transpuesta* de aquella otra de la ecuación (2), y viceversa. Se trata de una *propiedad general* que cumplen todas aquellas estructuras en las que es aplicable la *hipótesis de desplazamientos pequeños*:

> ***La matriz que transforma los esfuerzos o solicitaciones en acciones es la transpuesta de aquella otra que transforma los grados de libertad en alargamientos de cables***, siempre y cuando las acciones elegidas para la representación sean homólogas con los grados de libertad, y las solicitaciones con los alargamientos.

Esta propiedad puede usarse, entre otras cosas, para comprobar que tanto las ecuaciones de equilibrio como las de compatibilidad se han establecido correctamente: si, a la vista de ambos conjuntos de ecuaciones, la propiedad no se cumple, alguno o ambos de los conjuntos tiene errores.

Copyleft © 2009, Vázquez Espí. http://www.aq.upm.es/Departamentos/Estructuras/e96-290/doc/